

## Modifikasi Metoda Newton Raphson Nonlinear Geometri pada Sistem Struktur Rangka Sendi

Suci Putri Elza

Universitas Mercu Buana  
Email : [suci.putri@mercubuana.ac.id](mailto:suci.putri@mercubuana.ac.id)

### Abstract

*This paper discusses the analysis of nonlinear geometry structures with up to (finitesimal) displacement cases. Analysis was carried out by applying sequential incrementation techniques. For the loading stage with the nature of softened and hardened structures, Newton-Raphson iteration techniques are applied. Whereas for the loading stage with a global stiffness matrix determinant that approaches zero or negative, as found in snap-through cases, Modified Newton-Raphson iteration technique is used.*

*Structural analysis is contained in high-language Fortran. The program has been verified by Structural Analysis Program (SAP). The program is then applied in several case study examples of structural systems. Among other things is done by taking a ratio of the height to the varying structure range and taking a comparison of the axial stiffness of the jack element to varying pendel-pendal axial stiffness.*

*The analysis results in the form of load-displacement curves for three structural responses, namely softening, snap-through, and stiffening. Nonlinear behavior is increasingly apparent by reducing the modulus of elasticity and cross-sectional area. The softer the material, the greater the displacement that occurs for the same load. Nonlinear behavior is also increasingly seen in the structure due to the influence of the height ratio of the structure to the span. The smaller the comparison, the more apparent the influence of nonlinear geometry.*

*Keyword: nonlinear geometri, softening, snap-through, stiffening*

### Abstrak

Tulisan ini membahas analisis struktur nonlinear geometri dengan kasus perpindahan yang hingga (*finitesimal*). Analisis dilakukan dengan menerapkan teknik inkrementasi berturutan. Untuk tahap pembebanan dengan sifat struktur yang melunak maupun mengeras, diterapkan teknik iterasi Newton-Raphson. Sedangkan untuk tahap pembebanan dengan determinan matriks kekakuan global yang mendekati nol atau negatif, sebagai mana ditemukan dalam kasus *snap-through*, digunakan teknik iterasi Newton-Raphson modifikasi.

Analisis struktur dituangkan dalam bahasa tinggi Fortran. Verifikasi Program menggunakan Structural Analysis Program (SAP). Program kemudian diterapkan dalam beberapa contoh studi kasus terhadap sistem struktur. Di antaranya dilakukan dengan mengambil perbandingan tinggi terhadap bentang struktur yang bervariasi dan mengambil perbandingan kekakuan aksial elemen dongkrak terhadap kekakuan aksial pendel-pendel yang bervariasi.

Hasil analisis berupa kurva beban-perpindahan untuk tiga respon struktur, yaitu softening, snap-through, dan stiffening. Perilaku nonlinear makin jelas dengan mengecilnya modulus elastisitas dan luas penampang. Makin lunak bahan, makin besar perpindahan yang terjadi untuk pembebanan yang sama. Perilaku nonlinear juga semakin terlihat pada struktur akibat pengaruh perbandingan tinggi struktur terhadap bentang. Semakin kecil perbandingan tersebut, semakin nyata pengaruh dari nonlinear geometri.

*Kata kunci: nonlinear geometri, softening, snap-through, stiffening*

### I. PENDAHULUAN

Sistem yang elastis linier memiliki beberapa sifat yang memudahkan. Pertama, terdapat hubungan yang proposional antara pengaruh luar (misalnya beban) dengan tanggap struktur (misalnya gaya reaksi atau perpindahan), atau antara tanggap gaya reaksi dan perpindahan. Kedua, terhadap sistem yang elastis linier berlaku hukum superposisi, di mana tanggap total

struktur merupakan penjumlahan aljabar dari pada tanggap-tanggap struktur terhadap kombinasi pembebanan. Selain itu, atas dasar sifat linieritas dan berlakunya hukum superposisi, maka dalam sistem yang linier elastis, urutan dari kombinasi pembebanan tidak mempengaruhi tanggap akhir total sistem struktur. Dikatakan bahwa, sistem struktur yang elastis linear

merupakan sistem struktur dengan ingatan pendek (*short memory system*).

Dalam kasus sistem yang nonlinier, baik sifat proporsionalitas gaya-perpindahan, hukum superposisi tidak berlaku, urutan pembebanan sangat berpengaruh terhadap hasil akhir tanggap struktur. Dengan demikian, teknis solusi yang dapat diterapkan kepada sistem yang elastis linier (*one time solution*), tidak dapat diterapkan secara langsung terhadap struktur yang nonlinier. Sistem struktur yang elastis nonlinier merupakan sistem dengan ingatan panjang (*long memory system*).

Cook (1990) menjabarkan sumber dari pada nonlinieritas sistem struktur terdiri dari dua macam, yaitu nonlinieritas bahan dan nonlinieritas geometri, sekalipun dua-duanya bisa terjadi secara bersamaan. Nonlinieritas bahan bersumber dari hubungan tegangan-regangan (*stress-strain relationship*) yang tidak bersifat proporsional, baik pada domain elastis maupun di luar domain elastis (elasto-plastis atau plastis sempurna). Nonlinieritas geometri umumnya ditimbulkan oleh topologi dan konektivitas sistem struktur, perpindahan yang hingga (*finitesimal displacement*). Namun yang akan menjadi bahasan dasar dalam tulisan ini adalah aspek perpindahan finitesimal saja.

Persoalan nonlinier biasanya diselesaikan dengan menggunakan solusi inkremental berurutan yaitu hubungan beban perpindahan yang berubah untuk setiap peningkatan beban. Algoritma metoda ini menggunakan pendekatan modulus sekan atau tangen dalam proses komputasinya.

Ruang lingkup pembahasan penelitian ini dibatasi pada struktur yang elastis untuk kasus nonlinear geometri dengan perpindahan yang hingga (*finitesimal*). Metoda penyelesaian yang digunakan adalah pendekatan inkremental (*incremental approach*). Analisis dilakukan dengan menggunakan iterasi Newton Raphson modifikasi dan teknik dongkrak, peningkatan beban diatur cukup kecil secara relatif dan kumulatif hingga didapatkan konfigurasi yang seimbang di bawah intensitas beban yang ditinjau. Permodelan struktur yang akan dianalisis diterapkan untuk struktur rangka sendi.

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah untuk menemukan suatu metode yang dapat digunakan untuk menyusun suatu metoda dan model numerik yang dapat diterapkan di dalam analisis struktur nonlinier elastis. Selain itu untuk memecahkan masalah struktur dengan syarat perpindahan finitesimal yang tidak dapat

disolusikan dengan metoda eksak, dapat didekati dengan metoda numerik.

## II. METODE

### Metode Elemen Hingga

Menurut Nasution (2010), Formulasi elemen hingga disusun dari teori elastistas dan prinsip kerja perpindahan maya. Teori elastisitas merupakan dasar dari perumusan mekanisme gaya dan perpindahan suatu struktur. Struktur yang menjadi pembahasan dibatasi hanya untuk badan atau sistem yang menerus dan terbuat dari bahan yang elastis, isotropik, dan homogen. Bahasan dimulai dengan iktisar mengenai konsep dasar dari teori mengenai tegangan, hubungan perpindahan dan regangan, hubungan tegangan dan regangan.

Dari teori mengenai tegangan dibahas mengenai persamaan keseimbangan gaya untuk suatu elemen kecil, namun persamaan keseimbangan tersebut tidak cocok digunakan untuk menyusun persamaan keseimbangan dalam formulasi metoda elemen hingga. Suatu cara lain yang akan dibahas disini adalah persamaan keseimbangan berdasarkan prinsip-prinsip energi atau kerja.

Pendefinisian keseimbangan didekati dengan prinsip perpindahan maya. Cara ini menjadi lebih umum karena keunggulannya terhadap prinsip energi potensial minimum yaitu prinsip perpindahan maya tidak bergantung apakah hubungan tegangan-regangan adalah linier atau tidak, dan juga berlaku untuk struktur yang tidak konservatif (sistem yang tidak mempunyai fungsi potensial).

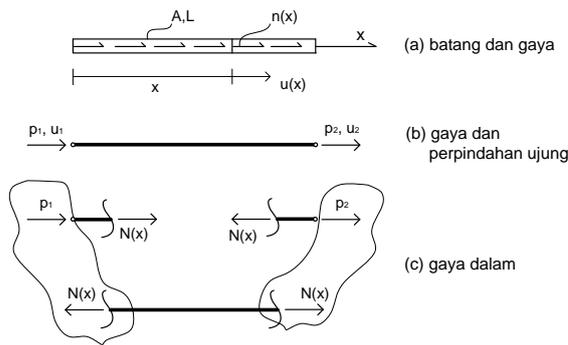
Setelah memperoleh kriteria keseimbangan dari prinsip perpindahan maya maka formulasi elemen hingga dapat disusun.

### Formulasi Elemen Hingga Batang Aksial

Menurut (Hariandja, 1997) Komponen pendel adalah batang lurus yang mengalami ragam aksial akibat beban luar maupun kondisi ujung yang sedemikian hingga hanya ragam deformasi aksial yang terjadi dalam batang. Sehingga misalnya, gaya luar yang bekerja bersifat aksial terhadap batang, dan kedua ujung sedemikian hingga tidak menyalurkan momen.

Pendel merupakan jenis elemen hingga yang paling sederhana, karenanya kita juga akan memulai pembelajaran elemen hingga dengan membahas elemen ini, sebelum kita siap untuk

membahas jenis-jenis elemen hingga yang lebih rumit dan kompleks.



**Gambar 1. Gaya dan Perpindahan Batang Aksial**

Untuk memulai, kita meninjau suatu batang lurus yang dibatasi kedua ujung 1 (\$x\_1\$) dan 2 (\$x\_2\$) sehingga panjang menjadi \$L = x\_2 - x\_1\$ dan luas penampang \$A\$. Perpindahan batang adalah di arah aksial dan kita namakan \$u(x)\$, yang nanti diambil sebagai interpolasi dari perpindahan ujung yang disusun dalam vektor perpindahan elemen

$$\{\hat{u}\} = \{u_1 \quad u_2\} \quad (1)$$

yang terkait atau koresponden dengan vektor gaya ujung elemen

$$\{\hat{p}\} = \{p_1 \quad p_2\} \quad (2)$$

Perpindahan diinterpolasi dengan menuliskan

$$u(x) = \sum_{i=1}^{i=2} N_i(x)u_i = [N_1(x) \quad N_2(x)]\{u_1 \quad u_2\} \quad (3)$$

Karena ada dua komponen perpindahan titik simpul, kita menggunakan perpindahan asumptif dalam suku-suku polinomial linier

$$u(x) = [1 \quad x]\{\alpha_1 \quad \alpha_2\} = [N_\alpha]\{\hat{\alpha}\} \quad (4)$$

Vektor \$\{\hat{\alpha}\}\$ dapat dinyatakan dalam vektor \$\{\hat{u}\}\$ dengan meninjau syarat batas perpindahan

$$u(0) = u_1; u(L) = u_2 \quad (5)$$

yang jika dimasukan ke dalam Persamaan (3) diatas memberikan

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

atau

$$[A]\{\hat{\alpha}\} = \{\hat{u}\} \quad (7)$$

inversi dari persamaan di atas memberikan

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/L & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [A]^{-1}\{\hat{u}\} \quad (8)$$

yang jika dimasukkan ke dalam Persamaan (dan dengan membandingkan hasilnya dengan bentuk dalam Persamaan (3), menghasilkan fungsi bentuk

$$[N_1(x) \quad N_2(x)] = [(1-x/L) \quad (x/L)] \quad (9)$$

Dengan tersusunnya fungsi perpindahan, maka proses penyusunan matriks kekakuan dimulai dengan menentukan vektor regangan yang diberikan oleh

$$\{\hat{\epsilon}\} = \{\epsilon_{xx}\} = \frac{d}{dx}[N_1(x) \quad N_2(x)]$$

$$\{\epsilon_{xx}\} = [B]\{\hat{u}\} = [-1/L \quad +1/L]\{\hat{u}\} \quad (10)$$

dan menyusun vektor tegangan

$$\{\hat{\sigma}\} = \{\sigma_{xx}\} = [E]\{\hat{\epsilon}\} = [E][B]\{\hat{u}\} \quad (11)$$

dengan tersusunnya matriks kekakuan bahan \$[E]\$ dan matriks \$[B]\$, matriks kekakuan elemen pendel dapat disusun dengan menerapkan Persamaan (12)

$$[k] = \iiint_v [B]^T [C][B] dV \quad (12)$$

menghasilkan ,

$$[k] = \int_0^L [B]^T [E][B] A dx = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (13)$$

Telah diterangkan sebelumnya bahwa dalam kasus elemen pendel, gaya-gaya luar hanya bersifat aksial terhadap elemen. Jika dinyatakan bahwa gaya luar aksial dalam \$n(x)\$, maka vektor gaya luar dapat diwakili oleh interpolasi intensitas gaya pada titik simpul

$$\{\hat{n}\} = \{n_1 \quad n_2\} \quad (14)$$

sehingga gaya luar aksial  $n(x)$  didekati dengan menggunakan fungsi bentuk sebagai interpolator, sehingga

$$n(x) = \sum_{i=1}^{I=2} [N_1(x) \quad N_2(x)] \{n_1 \quad n_2\} = [N] \{\hat{n}\} \quad (15)$$

Dengan demikian, vektor gaya ujung ekivalen elemen dapat disusun

$$\{\ddot{n}\} = \int_0^L [N]^T \{\hat{n}\} dx = \begin{Bmatrix} (2n_1L/3 + n_2L/3) \\ (n_1L/3 + 2n_2L/3) \end{Bmatrix} \quad (16)$$

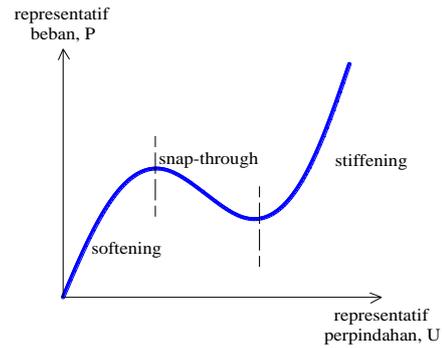
**Analisis Nonlinear**

Sistem struktur yang kompleks dapat menunjukkan perilaku nonlinier, baik geometri maupun material di bawah pembebanan statis maupun dinamis. Nonlinieritas material bersumber dari hubungan tegangan-regangan (*stress-strain relationship*) yang tidak bersifat proporsional, baik pada domain elastis maupun di luar domain elastis (elasto-plastis atau plastis sempurna). Nonlinieritas material ditandai dengan adanya elemen-elemen struktur yang berdeformasi melampaui kapasitas elastisnya. Sedangkan nonlinieritas geometri dapat terjadi sekalipun perilaku material masih berada dalam daerah linear elastis dan beban yang terjadi masih di bawah normal yang diakibatkan adanya peningkatan perpindahan finitesimal struktur akibat peningkatan pembebanan (*large displacement*).

Pada analisis nonlinear, Hariandja (1985) Menegaskan bahwa ketika awal pembebanan dilakukan, struktur akan menunjukkan perilaku melunak (*softening*) ataupun mengeras (*stiffening*). Namun di antara itu perilaku struktur dapat mengalami perilaku *snap-through*, sebelum akhirnya bertransisi ke perilaku mengeras (*stiffening*). Lebih jelasnya dapat dilihat dalam Gambar 2.

Untuk menangani kondisi yang demikian, maka akan digunakan metoda Newton Raphson modifikasi, dimana metoda ini terbukti cukup ampuh untuk menangani masalah nonlinier dan telah banyak digunakan oleh peneliti-peneliti sebelumnya, diantaranya Muin, R.B (2010), Lalo, D. F., Silva, M. O., & Greco, M. (2018), Li, G., & Yu, D. H. (2018).

Untuk kondisi *softening* dan *stiffening*, untuk kondisi *snap-through* dapat digunakan metoda *arch length* atau metoda dongkrak.



**Gambar 2. Representatif Perilaku Struktur Nonlinear**

Teknik solusi menggunakan cara inkremental, di mana perpindahan pada waktu  $t$  mendapatkan inkrementasi dalam kurun waktu tambahan  $\Delta t$ , sehingga perpindahan total pada saat  $t+\Delta t$  dapat dituliskan dalam bentuk inkrementasi

$${}^{t+\Delta t}U = {}^tU + \Delta^t U \quad (17)$$

Seturut dengan itu, regangan pada saat  $t+\Delta t$  dituliskan dalam bentuk

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{xx} = \frac{\partial {}^{t+\Delta t}U}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^{t+\Delta t}U}{\partial x} \right)^2 \quad (18)$$

yang didekomposir dalam bentuk

$${}^{t+\Delta t}\epsilon_{xx} = {}^t\epsilon_{xx} + \Delta^t \epsilon_{xx} \quad (19)$$

dalam mana

$${}^t\epsilon_{xx} = \frac{\partial {}^tU}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial {}^tU}{\partial x} \right)^2 \quad (20)$$

dan

$$\Delta^t \epsilon_{xx} = \frac{\partial \Delta^t U}{\partial x} + \left( \frac{\partial {}^tU}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Delta^t U}{\partial x} \right) = \left( 1 + \frac{\partial {}^tU}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial \Delta^t U}{\partial x} \right) \quad (21)$$

Bentuk dalam Persamaan (21) dituangkan dalam format elemen hingga, dengan menuliskan

$${}^tU = N_1 {}^tU_1 + N_2 {}^tU_2 \quad (22)$$

Dan

$$\Delta^t U = N_1 \Delta^t U_1 + N_2 \Delta^t U_2 \quad (23)$$

Bentuk dalam Persamaan (21) dan (23) memberikan

$${}^{\Delta} \varepsilon_{xx} = (1 + N_{1,x} {}^t U_1 + N_{2,x} {}^t U_2) (N_{1,x} {}^{\Delta} U_1 + N_{2,x} {}^{\Delta} U_2) \quad (24)$$

yang jika Persamaan (9) dimasukkan ke dalamnya, memberikan

$${}^{\Delta} \varepsilon_{xx} = [{}^t B] \{U\} \quad (25)$$

di mana

$$[{}^t B] = \left( 1 + \frac{{}^t U_2 - {}^t U_1}{L} \right) \left[ -\frac{1}{L} \quad +\frac{1}{L} \right] \quad (26)$$

Pemasukan bentuk dalam Persamaan (26) ke dalam Persamaan (12) menghasilkan matriks kekakuan elemen pada saat t sebagai

$$[{}^t k] = \left( 1 + \frac{{}^t U_2 - {}^t U_1}{L} \right) \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (27)$$

yang dapat digunakan dalam analisis sistem struktur nonlinear yang diselesaikan dengan metoda Newton-Raphson dan/atau Newton-Raphson modifikasi

### Metoda Newton Raphson Modifikasi

Persamaan dasar diselesaikan dalam analisis nonlinear, pada waktu  $t+\Delta t$ ,

$${}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F = 0 \quad (28)$$

Karena  ${}^{t+\Delta t} F$  bergantung secara nonlinear pada perpindahan titik nodal, solusi harus diiterasi. Iterasi Newton-Raphson modifikasi menghasilkan

$$\Delta R^{(i-1)} = {}^{t+\Delta t} R - {}^{t+\Delta t} F^{(i-1)} \quad (29)$$

$${}^t K \Delta U^{(i)} = \Delta R^{(i-1)} \quad (30)$$

$${}^{t+\Delta t} U^{(i)} = {}^{t+\Delta t} U^{(i-1)} + \Delta U^{(i)} \quad (31)$$

dengan

$${}^{t+\Delta t} U^{(0)} = {}^t U; \quad {}^{t+\Delta t} F^{(0)} = {}^t F;$$

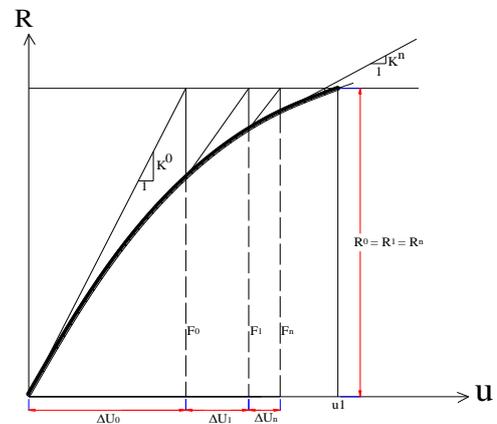
Persamaan (29) menghitung vektor beban yang belum seimbang yang menghasilkan sebuah inkremental perpindahan melalui Persamaan (30). Iterasi terus dilakukan hingga vektor beban yang belum seimbang  $\Delta R^{(i-1)}$  atau inkremental perpindahan  $\Delta U^{(i)}$  cukup kecil.

Iterasi Newton Raphson modifikasi melibatkan lebih sedikit perubahan kekakuan daripada iterasi Newton raphson penuh dan mendasarkan pembaharuan matriks kekakuan pada sebuah konfigurasi keseimbangan yang diterima. Pilihan kapan matriks kekakuan harus diperbaharui tergantung pada derajat nonlinieritas

dalam respon sistem. Makin nonlinear respon, makin sering pembaharuan perlu dilakukan.

Secara skematik, iterasi untuk setiap interval pembebanan berjalan sebagai berikut.

1. Iterasi ke-1, hitung  ${}^t K^{(0)} = K_L^{(0)}$  ; dengan  $R^{(0)} = R_i$  dan  $F^{(0)} = 0$  ; dari Persamaan (30) disolusikan  $U^{(0)}$ ;  ${}^t U = U^{(0)}$
2. Iterasi ke-2, hitung  $F^{(i)}$  dengan  $R^{(i)} = R^{(0)}$  dan  ${}^t K^{(i)} = {}^t K^{(0)}$ ; solusikan Persamaan (30) untuk mendapatkan  $U^{(1)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + U^{(n)}$
3. Iterasi ke n+1, hitung  $F_n$  dengan  $R^{(n)} = R^{(i)}$ ; perbaharui K yaitu  ${}^t K_n = {}^t K_L + {}^t K_{NL}$ . Solusikan Persamaan (30) untuk mendapatkan  $U^{(n)}$ ,  ${}^{t+\Delta t} U = {}^t U + U^{(n)}$

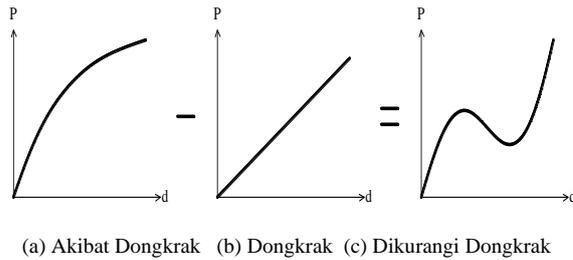


Gambar 3. Metoda Newton Raphson Modifikasi

Iterasi dilanjutkan terus hingga konvergen, Harga n tersebut di atas dapat digunakan secara beragam misalnya 4, 5, atau 6. Kriteria konvergensi dapat diambil dengan cara membandingkan gaya-gaya bersisa dengan akar jumlah kuadrat dari perpindahan total. Secara grafis mekanisme iterasi diperlihatkan dalam Gambar 3.

### Metoda Dongkrak

Seperti yang sudah dijelaskan diawal Bab, untuk mendapatkan kurva *snap-through* dari Kurva P-U pada respon struktur nonlinear, maka digunakan metoda dongkrak. Solusi sistem dongkrak ini maksudnya adalah penambahan kekakuan struktur akibat penambahan elemen pendel pada sistem struktur dengan kekakuan elemen pendel itu sendiri. Untuk lebih jelasnya ditunjukkan pada Gambar 4.



**Gambar 4. Metode Dongkrak**

Pada Gambar 4(a) terlihat bahwa akibat penambahan elemen pendel pada analisis terjadi penambahan kekakuan. Sehingga untuk mendapatkan perilaku struktur yang sebenarnya, perilaku sistem struktur akibat penambahan elemen pendel dikurangi dengan kekakuan elemen pendel itu sendiri seperti pada gambar 4(b) Sehingga menghasilkan perilaku struktur seperti pada Gambar 4(c).

**Pemrograman Komputer**

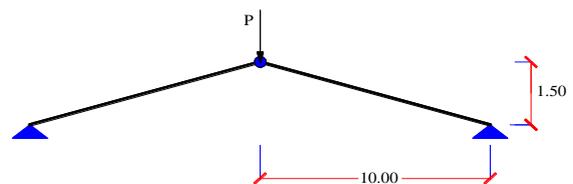
Analisis Struktur yang telah dipaparkan akan disusun kedalam suatu program paket komputer. Pemrograman dilakukan dengan menggunakan perangkat lunak komputer dengan bahasa tingkat tinggi Fortran yang paling sering diterapkan dalam disiplin ilmu rekayasa. Program dibuat secara modular dan terstruktur agar mudah dalam pengembangannya. Program terdiri atas program utama dan subroutine program yang bercabang membentuk struktur hirarki. Program utama berisi urutan pokok dari seluruh pekerjaan yang diperlukan, dengan kata lain program utama merupakan hirarki yang paling tinggi dalam susunan program karena berfungsi sebagai koordinator subroutine program. Sedangkan subroutine merupakan suatu kelompok perhitungan yang memiliki proses perhitungan yang fungsinya dapat dipanggil berulang kali pada program utama. Hal ini memudahkan penelusuran jika terjadi kesalahan, selain itu proses kompilasi dan penggabungan modul-modul (linking) menjadi jauh lebih efisien.

Fotran merupakan program open source yang memungkinkan setiap orang untuk mengembangkan program ini dengan membuat sendiri perintah bagi program fotran sehingga dapat dapat memodelkan elemen yang tidak umum bagi kebutuhannya. Hasil perintah buatan tersebut dapat dibagikan kepada semua orang sehingga memungkinkan pengguna lain yang akan membutuhkan perintah untuk memodelkan hal yang sama di kemudian hari. Untuk

penerjemahan dari program sumber (source code) menjadi bahasa mesin ini diperlukan interpreter yang dikenal sebagai compiler yang berfungsi untuk mengkompilasi program (compile program). Algoritma yang telah disusun dituangkan ke dalam program sumber kemudian dikompilasi, jika tidak memiliki kesalahan (bugs) dalam proses kompilasi, maka dilanjutkan dengan proses build program untuk menghasilkan file aplikasi program yang berekstensi .exe.

**Validasi Program**

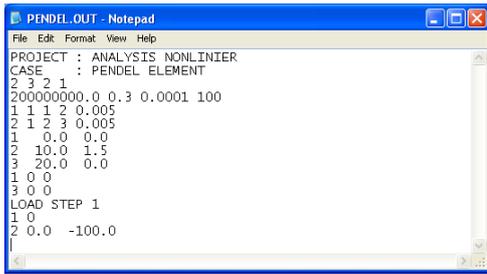
Pada Program yang telah disusun dan diberi nama NLG-STAP akan diuji kebenarannya dengan melakukan proses validasi. Proses validasi ini menggunakan struktur rangka sendi bidang yang terdiri atas dua elemen pendel dan tiga titik simpul seperti dalam Gambar 5. Data masukan yang ditunjukkan dalam Gambar 6. dimasukkan melalui pembacaan file dengan format seperti tertera dalam Tabel 1.



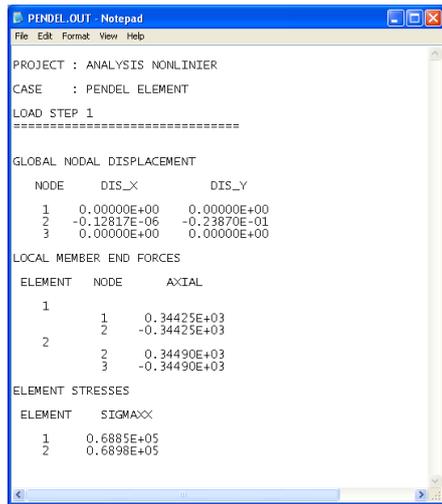
**Gambar 5. Permodelan Struktur Rangka Sendi**

**Tabel 1. Format Data Masukan**

No	Nama Blok Data	Jumlah Baris	Data Dalam 1 Baris
1	Judul proyek	1	NJO*72
2	Judul struktur	1	NCA*72
3	Parameter umum	1	NEL, NOD, ICO,NLO
4	Parameter kusus	1	E,NU,EPS, MAXTER
5	tipe elemen, incidence, luas	NEL	K,LTY(K), (INC(L,K), L=1,NOE), PRO(1,K)
6	Koordinat titik	NOD	K,(COR(L,K,L=1,NDI)
7	Kekangan	ICO	N,(IAC(M,N, M=1,NDN)
8	Judul pembebanan	1	NAL*72
9	Parameter beban	1	INL
10	Beban titik	INL	N, OPR(1), OPR(2)



Gambar 6. Data Masukan Program



Gambar 7. Data Keluaran Program

Data keluaran yang ditunjukkan dalam Gambar 7. kemudian dibandingkan dengan data keluaran analisis struktur yang sama yang diperoleh dengan menggunakan program paket SAP (Structural Analysis Program) disajikan dalam Tabel 1.

Tabel 2. Perbandingan Hasil Keluaran Program

No	Pembanding	Progam	SAP
1	Perpindahan Arah Y pada Node 2	-0.02387	-0.027507
2	Gaya Dalam Axial	344.250	344.328
3	Tegangan Aksial	68850	68850

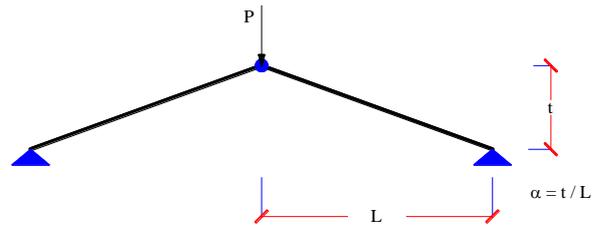
Hasil yang diperoleh dengan menggunakan program yang telah disusun cukup dekat dengan hasil run yang menggunakan program paket SAP. Perpindahan di arah Y pada titik nodal 2 berbeda 13.2% dibandingkan dengan hasil keluaran SAP. Ini dikarenakan program memasukkan nonlinieritas geometri, sedangkan SAP didasarkan atas analisis linier elastis. Namun tegangan aksial adalah sama, ini dikarenakan struktur rangka yang dianalisis merupakan sistem

yang statis tentu, di mana gaya reaksi tidak dipengaruhi perpindahan.

### III. HASIL DAN DISKUSI

Analisis struktur yang telah dituangkan dalam satu paket komputer dengan menggunakan metoda elemen hingga untuk analisis nonlinear, seperti yang dibahas sebelumnya.

Studi kasus dibatasi pada kasus sistem struktur rangka sendi. Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 8.



Gambar 8. Struktur Rangka Batang tipe I

Struktur rangka sendi dengan dua elemen batang yang dibebani secara vertikal oleh beban terpusat pada titik simpul ditengah struktur. Pembebanan dilakukan beberapa kali hingga struktur mengalami perilaku nonlinear. Pembahasan mencakup pengaruh asumsi nonlinear geometri terhadap perilaku struktur bila,

1. variasi perbandingan bentang struktur L dengan tinggi struktur T yang selanjutnya disebut  $\alpha$ ,
2. variasi modulus elastisitas E dan luas penampang A yang selanjutnya disebut  $\beta$ ,

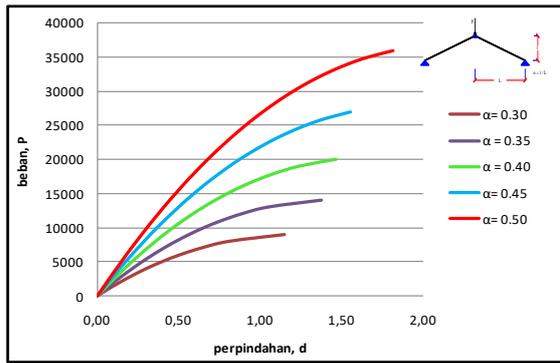
Hasil keluaran disajikan dalam bentuk Gambar beban vs perpindahan vertikal tengah struktur-beban untuk setiap variasi  $\alpha$  dan  $\beta$ .

#### Masalah struktur tinggi

Untuk nilai  $\alpha$  yang besar dalam hal ini diterapkan untuk  $0.30 \leq \alpha \leq 0.50$ , analisis dilakukan untuk struktur tipe I seperti yang terlihat dalam Gambar 8 diatas, akan dilakukan perbandingan untuk variasi  $\alpha$  positif dan  $\alpha$  negatif.

#### Perbandingan Hasil Perhitungan Untuk $\alpha$ Bervariasi Positif

Studi kasus pertama dilakukan untuk struktu tipe I untuk  $0.30 \leq \alpha \leq 0.50$  dengan kelipatan  $\alpha=0.05$ . Besarnya  $\beta$  sama. Tahap pembebanan akan dilakukan sebanyak 40 kali.

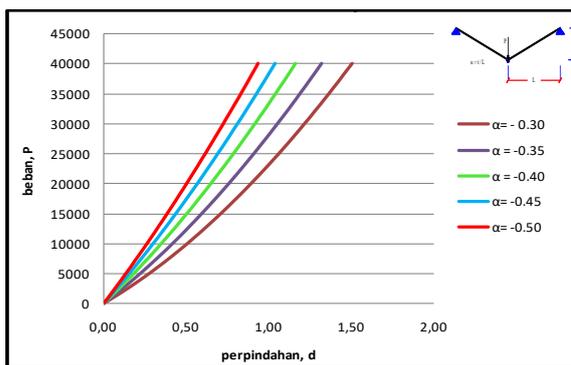


**Gambar 9. Beban Vs Perpindahan Untuk  $0.30 \leq \alpha \leq 0.50$**

Dari Gambar 9, terlihat bahwa struktur mengalami perilaku nonlinear, di mana kekakuan struktur berubah sesuai dengan pertambahan beban. Untuk beban yang sama, perpindahan yang dihasilkan untuk struktur dengan  $\alpha$  yang lebih besar ( $\alpha = 0.50$ ) adalah lebih kecil dari pada struktur dengan  $\alpha$  yang kecil ( $\alpha = 0.30$ ). Selain itu semakin besar  $\alpha$ , maka beban maksimum yang dapat dipikul struktur akan semakin besar pula. Sedangkan kekakuan struktur akan semakin berkurang seiring pertambahan perpindahan struktur.

**Perbandingan hasil Perhitungan Untuk  $\alpha$  Bervariasi Negatif**

Studi kasus kedua dilakukan untuk struktu tipe I juga, namun untuk  $-0.30 \leq \alpha \leq -0.50$  dengan kelipatan  $\alpha=0.05$ . Besarnya  $\beta$  sama. Tahap pembebanan akan dilakukan sebanyak 40 kali.



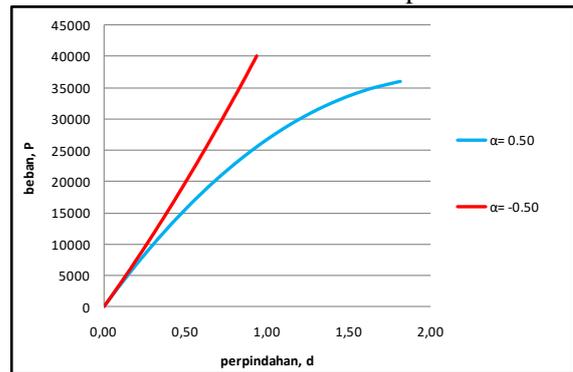
**Gambar 10 Beban Vs Perpindahan Untuk  $-0.30 \leq \alpha \leq -0.50$**

Dari Gambar 10. terlihat bahwa struktur mengalami perilaku nonlinier, di mana kekakuan struktur berubah sesuai dengan pertambahan beban. Untuk beban yang sama, perpindahan yang dihasilkan untuk struktur dengan  $\alpha$  yang lebih besar ( $\alpha = -0.30$ ) adalah lebih besar dari

pada struktur dengan  $\alpha$  yang kecil ( $\alpha = -0.50$ ). Selain itu dapat diketahui pula bahwa semakin kecil nilai  $\alpha$ , maka struktur semakin kaku, sehingga untuk beban yang sama, deformasi yang dihasilkannya pun akan semakin kecil.

**Perbandingan Hasil Perhitungan Untuk  $\alpha$  Bervariasi Positif dan Negatif**

Studi kasus ketiga adalah membandingkan hasil perhitungan untuk nilai  $\alpha$  yang sama dengan tanda yang berlawanan, kasus untuk  $\alpha = -0.50$  dan  $\alpha = 0.50$  untuk struktur tipe I.



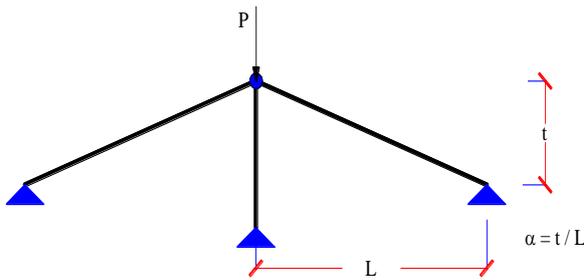
**Gambar 11. Beban Vs Perpindahan Untuk  $\alpha = -0.50$  dan  $\alpha = 0.50$**

Dari Gambar 11, terlihat bahwa struktur mengalami perilaku nonlinier, di mana kekakuan struktur berubah sesuai dengan pertambahan beban. Untuk  $\alpha$  yang bernilai positif dalam hal ini ( $\alpha = 0.50$ ) struktur mengalami perilaku *softening* di mana kekakuan struktur berkurang seiring dengan pertambahan perpindahan

. Sementara untuk  $\alpha$  yang bernilai ( $\alpha = -0.50$ ), struktur mengalami perilaku *stiffening* di mana kekakuan struktur justru semakin meningkat dengan pertambahan perpindahan. Untuk itu terlihat bahwa untuk beban yang sama, perpindahan struktur yang dihasilkan untuk struktu dengan alfa yang bernilai positif lebih besar dari pada struktur dengan alfa yang bernilai negatif.

**Masalah Snap-through**

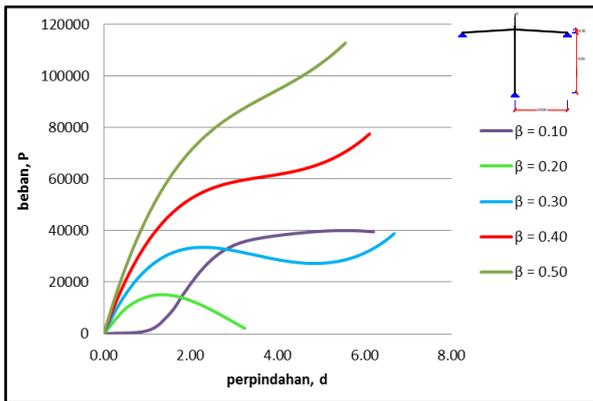
Perilaku struktur nonlinier pada saat tegangan puncak terjadi yaitu pada titik kritis, struktur akan mengalami perilaku *snap-through*. Hal ini terjadi untuk nilai  $\alpha$  yang kecil. Untuk itu, kasus  $\alpha$  yang kecil struktur rangka sendi yang telah dijelaskan dalam sub bab sebelumnya. diberikan struktur tambahan seperti yang terlihat pada Gambar 12.



Gambar 12. Struktur Rangka Batang Tipe II

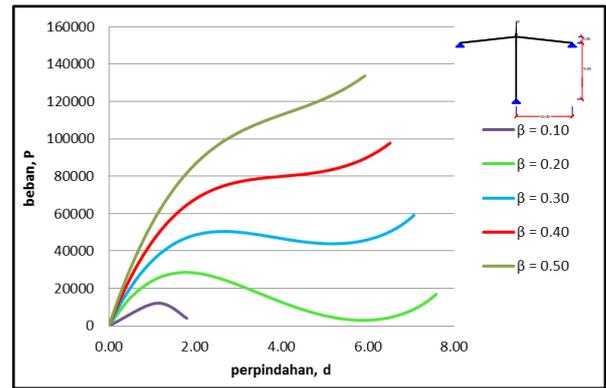
**Perbandingan Hasil Perhitungan Untuk  $\alpha$  Bervariasi Positif**

Studi kasus keempat dilakukan untuk struktu tipe II untuk  $0.05 \leq \alpha \leq 0.25$  dengan kelipatan  $\alpha=0.05$ . Di mana untuk setiap  $\alpha$  akan diterapkan variasi dengan  $0.00 \leq \beta \leq 0.50$ , sehingga dapat ditentukan nilai  $\beta$  yang cocok setiap variasi  $\alpha$ . Pembebanan dilakukan sebanyak 30 kali.



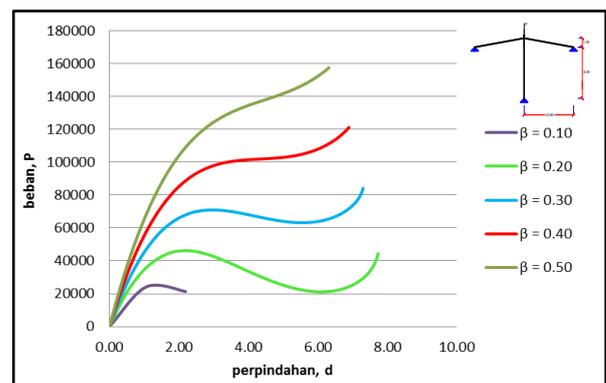
Gambar 13. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = 0.05$

Dari Gambar 13, terlihat bahwa perilaku struktur mengalami tiga kondisi nonlinier, yaitu *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Untuk struktur dengan nilai  $\beta$  yang besar dalam hal ini ( $\beta = 0.50$ ) untuk mencapai titik kritis beban yang diterapkan harus lebih besar dari pada struktur nilai  $\beta$  yang kecil dalam hal ini ( $\beta = 0.10$ ). Selain itu penerapan pembebanan yang sama untuk struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar menghasilkan perpindahan yang lebih kecil dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar  $\beta$  maka kekakuan struktur akan semakin besar pula, berbanding terbalik dengan perpindahan yang dihasilkan justru semakin kecil. Untuk  $\alpha = 0.05$  struktur mulai tidak stabil untuk  $\beta \leq 0.20$ .



Gambar 14. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = 0.10$

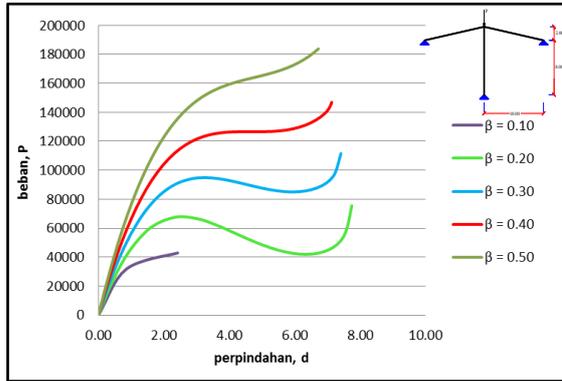
Dari Gambar 14, terlihat bahwa perilaku struktur mengalami tiga kondisi nonlinier, yaitu *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Untuk struktur dengan nilai  $\beta$  yang besar dalam hal ini ( $\beta = 0.50$ ) untuk mencapai titik kritis beban yang diterapkan harus lebih besar dari pada struktur nilai  $\beta$  yang kecil dalam hal ini ( $\beta = 0.10$ ). Selain itu penerapan pembebanan yang sama untuk struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar menghasilkan perpindahan yang lebih kecil dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar  $\beta$  maka kekakuan struktur akan semakin besar pula, berbanding terbalik dengan perpindahan yang dihasilkan justru semakin kecil. Untuk  $\alpha = 0.10$  struktur mulai tidak stabil untuk  $\beta \leq 0.10$ .



Gambar 15. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = 0.15$

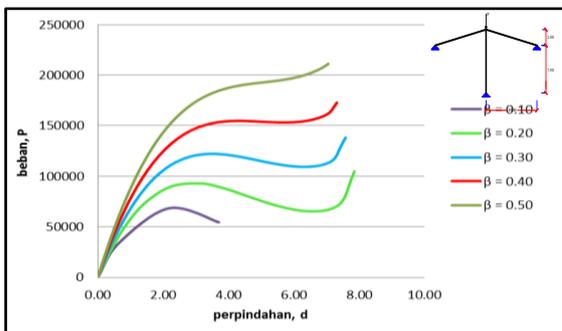
Dari Gambar 15, terlihat bahwa perilaku struktur mengalami tiga kondisi nonlinier, yaitu *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Untuk struktur dengan nilai  $\beta$  yang besar dalam hal ini ( $\beta = 0.50$ ) untuk mencapai titik kritis beban yang diterapkan harus lebih besar dari pada struktur nilai  $\beta$  yang kecil dalam hal ini ( $\beta = 0.10$ ). Selain itu penerapan pembebanan yang sama untuk

struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar menghasilkan perpindahan yang lebih kecil dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar  $\beta$  maka kekakuan struktur akan semakin besar pula, berbanding terbalik dengan perpindahan yang dihasilkan justru semakin kecil. Untuk  $\alpha = 0.15$  struktur mulai tidak stabil untuk  $\beta \leq 0.10$ .



**Gambar 16. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = 0.20$**

Dari Gambar 16. terlihat bahwa perilaku struktur mengalami tiga kondisi nonlinier, yaitu *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Untuk struktur dengan nilai  $\beta$  yang besar dalam hal ini ( $\beta = 0.50$ ) untuk mencapai titik kritis beban yang diterapkan harus lebih besar dari pada struktur nilai  $\beta$  yang kecil dalam hal ini ( $\beta = 0.10$ ). Selain itu penerapan pembebanan yang sama untuk struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar menghasilkan perpindahan yang lebih kecil dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar  $\beta$  maka kekakuan struktur akan semakin besar pula, berbanding terbalik dengan perpindahan yang dihasilkan justru semakin kecil. Untuk  $\alpha = 0.20$  struktur mulai tidak stabil untuk  $\beta \leq 0.10$ .

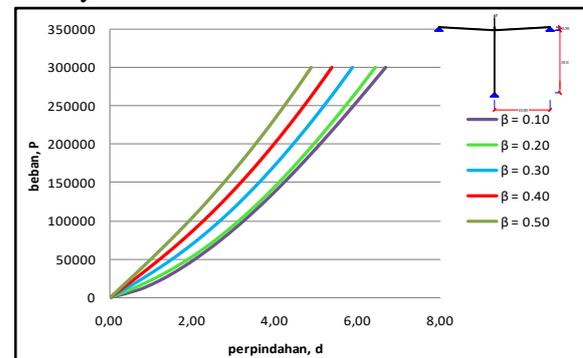


**Gambar 17. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = 0.25$**

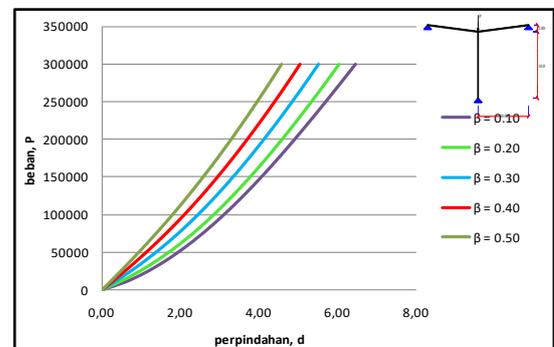
Dari Gambar 17, terlihat bahwa perilaku struktur mengalami tiga kondisi nonlinier, yaitu *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Untuk struktur dengan nilai  $\beta$  yang besar dalam hal ini ( $\beta = 0.50$ ) untuk mencapai titik kritis beban yang diterapkan harus lebih besar dari pada struktur nilai  $\beta$  yang kecil dalam hal ini ( $\beta = 0.10$ ). Selain itu penerapan pembebanan yang sama untuk struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar menghasilkan perpindahan yang lebih kecil dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil. Hal ini dikarenakan semakin besar  $\beta$  maka kekakuan struktur akan semakin besar pula, berbanding terbalik dengan perpindahan yang dihasilkan justru semakin kecil. Untuk  $\alpha = 0.25$  struktur mulai tidak stabil untuk  $\beta \leq 0.10$ .

**Perbandingan Hasil Perhitungan Untuk  $\alpha$  Bervariasi Negatif**

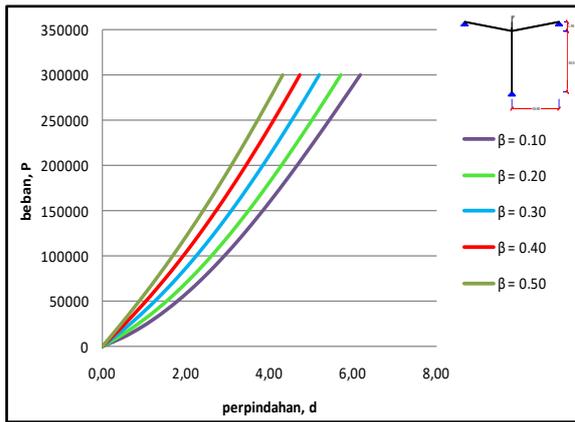
Studi kasus keempat dilakukan untuk struktu tipe II untuk  $-0.05 \leq \alpha \leq -0.25$  dengan kelipatan  $\alpha=0.05$ . Di mana untuk setiap  $\alpha$  akan diterapkan variasi dengan  $0.00 \leq \beta \leq 0.50$ , sehingga dapat ditentukan nilai rentang  $\beta$  yang cocok setiap variasi  $\alpha$ . Pembebanan dilakukan sebanyak 30 kali.



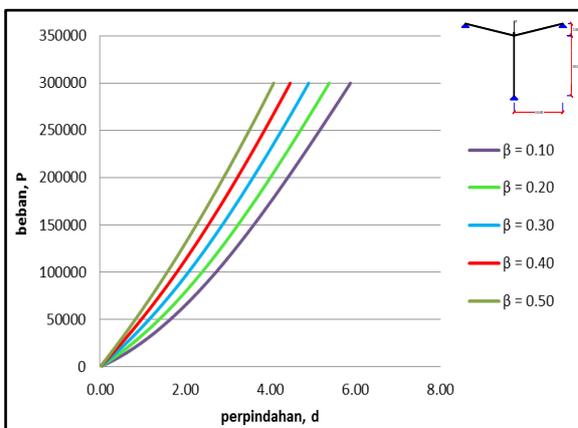
**Gambar 18. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = -0.05$**



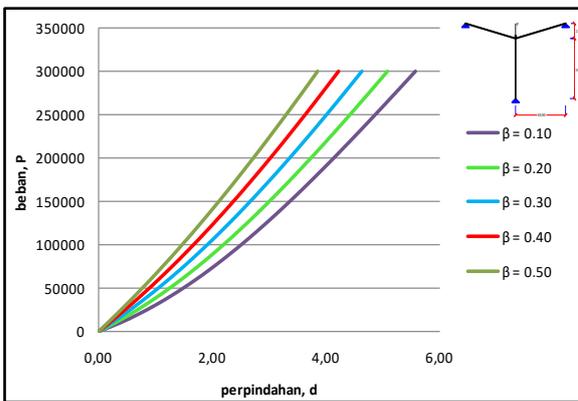
**Gambar 19. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = -0.10$**



**Gambar 20. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = -0.15$**



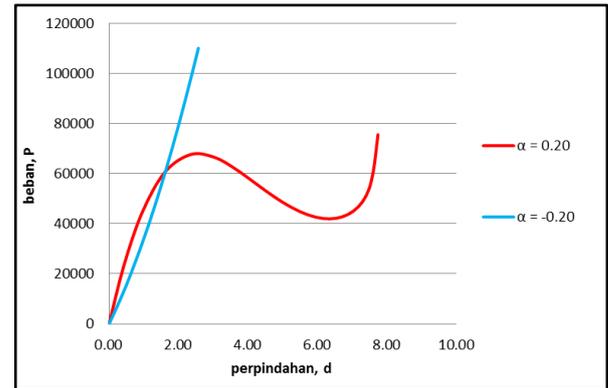
**Gambar 21. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = -0.20$**



**Gambar 22. Beban Vs Perpindahan Dengan  $0.10 \leq \beta \leq 0.50$  Untuk  $\alpha = -0.25$**

Dari Gambar 18 sampai Gambar 22, terlihat bahwa perilaku struktur hanya mengalami kondisi *stiffening*. Kekakuan struktur justru semakin meningkat dengan pertambahan perpindahan. Penerapan pembebanan yang sama untuk struktur dengan  $\beta$  yang lebih kecil menghasilkan perpindahan yang lebih besar dari pada struktur dengan  $\beta$  yang lebih besar.

**Perbandingan Hasil Perhitungan Untuk  $\alpha$  Bervariasi Positif dan Negatif**

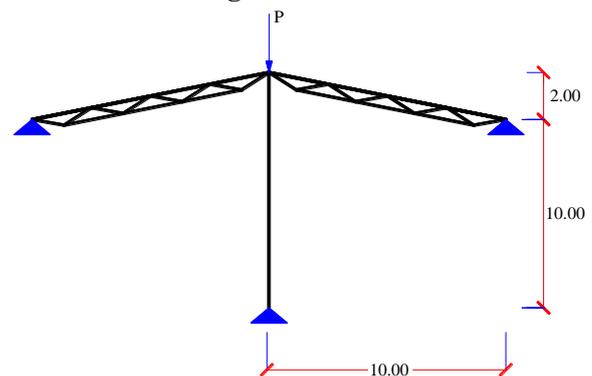


**Gambar 23. Beban Vs Perpindahan Untuk  $\alpha = -0.2$  dan  $\alpha = 0.2$**

Studi kasus kelima adalah membandingkan hasil perhitungan untuk nilai  $\alpha$  yang sama dengan tanda yang berlawanan, kasus untuk  $\alpha = -0.20$  dan  $\alpha = 0.20$  untuk struktur tipe II.

Dari Gambar 23. terlihat bahwa dengan nilai  $\beta$  yang sama dan  $\alpha$  yang berbeda menghasilkan perilaku yang berbeda. Untuk  $\alpha = 0.2$  struktur memiliki tiga kondisi, *softening*, *snap-through* dan *stiffening*. Sedangkan untuk  $\alpha = -0.2$ , struktur hanya mengalami kondisi *stiffening*. Kekakuan struktur justru semakin meningkat dengan pertambahan perpindahan.

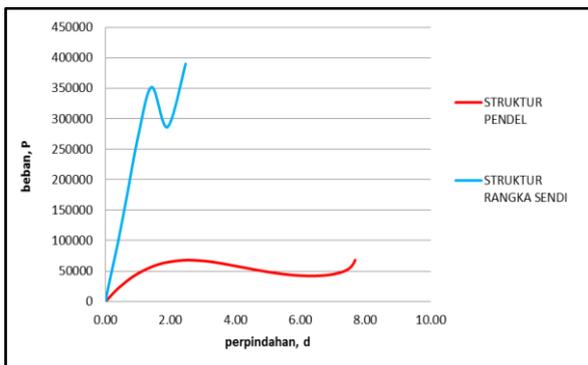
**Kasus Sistem Rangka Sendi**



**Gambar 24. Permodelan Struktur Rangka Sendi**

Sebagai penerapan program lebih lanjut untuk Struktur Rangka Sendi diterapkan pada struktur dalam Gambar 24. Struktur mengalami pembebanan terpusat pada tengah bentang struktur. Pembebanan dilakukan sebanyak 40 kali. Hasil keluaran program untuk struktur tersebut disajikan dalam Gambar 25. yang dibandingkan dengan struktur pendel dengan

perbandingan tinggi terhadap bentang yang bervariasi, yaitu  $\alpha = 0.2$ .



**Gambar 25. Beban Vs Perpindahan Untuk  $\alpha = 0.2$**

Dalam Gambar 25. terlihat bahwa struktur rangka sendi mengalami kondisi melunak (*softening*), *snap-through*, dan mengeras (*stiffening*). Selain itu terlihat juga bahwa kekakuan struktur rangka sendi lebih kaku dibandingkan struktur pendel. Pada struktur rangka sendi beban maksimum yang dapat dipikul struktur adalah 351892,395 KN yang memberikan perpindahan pada struktur di tengah bentang sebesar 1.42 m, sedangkan pada struktur pendel beban maksimum yang dapat dipikul struktur adalah 67626.903 KN yang memberikan perpindahan struktur di tengah bentang sebesar 2.36 m.

### Pembahasan Hasil

Dari semua hasil yang telah diperoleh sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa penerapan metoda Newton-Raphson hanya dapat digunakan untuk sistem struktur dengan determinan kekakuan yang positif. Untuk determinan matriks kekakuan yang bernilai negative harus digunakan metoda lain, seperti metoda arc-length atau metoda dongkrak. Kekakuan dongkrak perlu dipilih sedemikian penggunaannya menjadi optimal untuk kasus yang dihadapi; dengan perkataan lain, untuk  $\alpha$  yang dihadapi perlu dipilih nilai  $\beta$  yang optimal.

### KESIMPULAN

Dari hasil Analisis struktur nonlinier geometri, dalam kasus ini sistem struktur rangka sendi. Sebagai penutup maka diberikan rangkuman dari keseluruhan lingkup bahasan yaitu,

1. Suatu program paket analisis struktur nonlinier geometri yang didasarkan atas prinsip perpindahan maya dan disusun

berdasarkan formulasi elemen hingga telah dirampungkan.

2. Program telah dikompilasi, diperiksa kebenarannya, baik dalam sintaks maupun logika eksekusi, dan diuji coba serta diterapkan terhadap beberapa sistem struktur rangka sendi.
3. Program disusun secara modul sehingga dapat dimodifikasi dengan cepat sesuai kebutuhan.
4. Program telah divalidasi dengan membandingkan hasil yang diperoleh dengan hasil yang diperoleh dengan menggunakan program paket yang sudah ada dan tersedia di lapangan, dalam hal ini program paket SAP. Validasi menunjukkan hasil yang cukup dekat.

Setelah dilakukan pengujian untuk sistem rangka sendi yang diterapkan dalam beberapa contoh kasus maka kesimpulan mengenai hasil yang dicapai antara lain,

1. Dalam penggunaan program ini, penambahan step pembebanan harus diperhatikan dan diatur dengan cermat agar diperoleh perpindahan yang sesuai dengan perilaku nonlinier geometri yang terjadi.
2. Perilaku nonlinier makin jelas dengan mengecilnya modulus elastisitas dan luas penampang. Makin lunak bahan, makin besar perpindahan yang terjadi untuk pembebanan yang sama.
3. Perilaku nonlinier juga semakin terlihat pada struktur akibat pengaruh perbandingan tinggi struktur terhadap bentang. Semakin kecil perbandingan tersebut, semakin nyata pengaruh dari nonlinier geometri.
4. Program dapat digunakan untuk tiga respon struktur, yaitu *softening*, *snap-through*, dan *stiffening*.

### DAFTAR PUSTAKA

- Bathe, K.J., (1982) Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall.
- Cook, R. D., Malkus, D. S., Plesha, M. E. dan Witt, R. J., (2002) Concepts and Applications of Finite Element Analysis, John Wiley & Sons, Inc.
- Cook, R. D., Bambang,S., (1990) Konsep dan Aplikasi Metode Elemen Hingga. Eresco Bandung.
- Hariandja, B. H., (1997) Analisis Struktur Dalam Formulasi Matriks. Aksara Hutasada: Bandung.

- Hariandja, B. H., (1985) Adaptive Finite Element Analysis of Nonlinear Frictional Contact with Mixed Eulerian-Lagrangian Coordinates, disertasi doktoral, Civil Engineering Department, University of Illinois at Urbana- Champaign, USA.
- Logan, D.L, (1986) A first Course in the Finite Element Method, PWS Engineeing.
- Lalo, D. F., Silva, M. O., & Greco, M. (2018). Influence of damping ratio on a structural optimization design considering a dynamic analysis within the time domain. *Acta Scientiarum. Technology*, 40.
- Li, G., & Yu, D. H. (2018). Efficient Inelasticity-Separated Finite-Element method for material nonlinearity analysis. *Journal of Engineering Mechanics*, 144(4), 04018008.
- Mahmul, Mariatul K.,. (2017) Yudhi Modifikasi Metode Newton-Raphson Untuk Mencari Solusi Persamaan Linear Dan Nonlinear
- Muin, R.B. (2010) Pemodelan Gerak Dinamik Struktur Yang Berinteraksi Dengan Tanah Nonlinear Pada Arah Horizontal, KNPTS-ITB, Bandung. ISBN 978-979-16225-5-4.
- Muin, R.B. (2010) Nonlinear Response of Soil-Structure-Interaction due to Cyclic Loading, 1-ICSBE (UII), Indonesia, ISBN 9780979-96122-9-8.
- Nasution A, Metoda Elemen Hingga, ITB: Bandung (2010)
- Nasution A, Zakaria H. Metode Numerik dalam Ilmu Rekayasa Sipil. ITB: Bandung (2001)
- Putri, L.A., Handayanu., Budi, E. D. Analisa Struktur Dengan Metode Elemen Hingga Nonlinear (SNTMUT – 2014)
- Weaver, J.R. and Johnston, P.R., Finite Element for Structural Analysis, Prentice, (1987)
- Zienkiewicz, O. C., Taylor. R. L., The finite Element Method, Volume 1 & 2, McGraw-Hill, (1989,1991)